

MAT145 : Groupes 05 et 13, Hiver 2015  
École de technologie supérieure de Montréal

## Devoir 1

Exercice	Max	Points
1	45	
2	30	
3	30	
4	60	
5	55	
Tot.	220	

- Ce devoir compte pour 10% de la note finale. Le total des points est 220/200.
- **Conservez une photocopie de votre travail.**
- **Remise** : Avant 13h00, vendredi le 20 Février 2015, dans la chute à devoirs du SEG au B2500.
- À faire en équipe de **3 ou 4 étudiants**.
- Présentez des solutions **commentées**.
- Indiquez vos Noms, Prénoms ci-dessous :

Étudiant 1 : \_\_\_\_\_

Étudiant 2 : \_\_\_\_\_

Étudiant 3 : \_\_\_\_\_

Étudiant 4 : \_\_\_\_\_

**Bonne chance !**

**Question 1 (45 points)**

Dérivez les fonctions suivantes (à la main) :

1.  $f(x) = \ln(e^{-2x} + xe^{-x})$
2.  $f(x) = 3^{2x^3}$
3.  $f(x) = \sin(\sin(2x + \sin(2x)))$

**Question 2 (30 points)**

Soit  $f(x)$  définie par morceaux :

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Est-ce que  $f(x)$  est continue dans tout son domaine ? Argumentez.
2. Calculez  $f'(x_0)$  où  $x_0$  est un point générique dans le domaine de  $f(x)$  (séparez les cas  $x_0 < 0$ ,  $x_0 > 0$  et  $x_0 = 0$ ).
3. Est-ce que  $f(x)$  est dérivable dans tout son domaine ? Argumentez.

**Question 3 (30 points)**

Soit  $f(x) = x^2(x+2)^2 - \log(1+x)$ .

1. Montrez que  $f(x)$  est convexe (c.-à-d. concave vers le haut) en  $]0, \infty[$ . Vérifiez vos calculs avec la TI.
2. Utilisez le résultat au point précédent pour déduire que  $f(x)$  a une et une seule racine en  $]0, \infty[$ . Suggestion : utilisez les valeurs des limites  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$

**Question 4 (60 points)**

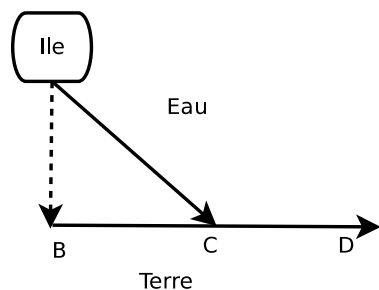
Étudiez la fonction  $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3}$ . En particulier :

1. Trouvez le domaine de  $f(x)$  et vérifiez, en utilisant les limites appropriées, s'il y a des asymptotes verticales ou horizontales et, s'il y a lieu, trouvez leurs équations.
2. Vérifiez l'existence d'asymptotes obliques et, s'il y a lieu, trouvez leurs équations.
3. Calculez  $f'(x)$  et  $f''(x)$ .

4. Étudiez le signe de  $f'(x)$  et  $f''(x)$ , et trouvez, s'il y a lieu, les points de maximum, minimum, racines, ainsi que les points d'inflexion.
5. Produisez et imprimez le graphique de  $f(x)$  obtenu par la TI.
6. Remarque : pour l'étude du signe de  $f(x)$ ,  $f'(x)$  et  $f''(x)$  vous pouvez utiliser la TI. Il faut faire les autres calculs (limites, dérivée, etc) à la main. Évidemment, vous pouvez toujours vérifier vos calculs avec la TI.

### Question 5 (55 points)

Les ornithologues ont observé que certaines espèces d'oiseaux ont tendance à éviter de survoler les grandes étendues d'eau pendant les heures de clarté. Il est connu que survoler de l'eau requiert plus d'énergie que survoler des terres parce que généralement l'air s'élève au-dessus des terres et tombe au-dessus de l'eau pendant le jour. Un oiseau est lâché d'une île située à 5km du point plus proche du littoral et vole jusqu'à un point C de ce littoral, supposé rectiligne, après quoi il longe le littoral jusqu'à son nid, situé en D. On suppose que l'oiseau instinctivement économise son énergie. Les points B et D sont distants de 13km.



1. Si survoler de l'eau prend 1.4 fois plus d'énergie que survoler les terres, jusqu'à quel point C l'oiseau va-t-il voler pour minimiser l'énergie totale dépensée pour gagner son nid ? (Rép. : approx. 5.1 km de B)
2. En général, soit  $E_e$  et  $E_t$  respectivement la quantité d'énergie (en joules) par kilomètre employée pour survoler l'eau ou les terres. Que voudrait dire une grande valeur du rapport  $E_e/E_t$  en termes de trajet choisi par l'oiseau ? Une petite valeur ? Calculez la valeur de ce rapport lorsque le comportement de l'oiseau est optimal en termes d'énergie dépensée. (Rép. : C est proche de B ; C est proche de D ;  $\frac{E_e}{E_t} = \frac{\sqrt{25+x^2}}{x}$ )
3. Quelle serait la valeur de  $E_e/E_t$  si l'oiseau volait directement vers son nid D ? Et si l'oiseau volait directement vers B et longeait ensuite sur le littoral jusqu'en D ? (Rep. :

aprox. 1.07; il n'y a pas de telle valeur)

4. Si des ornithologues observaient que certains oiseaux gagnent le littoral à 4 km de B, quelle est la proportion d'énergie supplémentaire que ces oiseaux-là emploieraient parce qu'ils survolent l'eau au lieu de terres ? (Rép : approx. 1.6).