MAT145 : Groupes 05 et 13, Hiver 2015
École de technologie supérieure de Montréal

Devoir 2

Exercice	Max	Points
1	40	
2	20	
3	20	
4	40	
5	70	
6	30	
Tot.	220	

- Ce devoir compte pour 10% de la note finale. Le total des points est 220/200.
- **Conservez une photocopie de votre travail.**
- **Remise** : Avant 12 :00, Vendredi le 10 avril 2015, dans **la chute à devoirs du SEG** au B2500.
- À faire en équipe de **3 ou 4 étudiants**.
- Une seule copie par équipe doit être remise.
- Présentez des solutions **commentées**.
- Indiquez vos noms, prénoms ICI :

Étudiant 1 : ______________________________

Étudiant 2 : ______________________________

Étudiant 3 : ______________________________

Étudiant 4 : ______________________________

Bonne chance !

Question 1 (40 points) (La TI est permise mais expliquez votre démarche en détails)
Soit $S(x)$ la fonction définie par :

$$S(x) = \int_0^x f(t)dt \quad \text{où} \quad f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{|x|}}$$

Sur le domaine $x \in [-10, 10]$:

a) Tracez le graphique de $S(x)$ et de $S'(x)$ dans la même fenêtre (produisez le graphique avec la TI).

b) En quelles valeurs de $x \in [-10, 10]$ $S(x)$ atteint des maximums locaux ?

c) Sur quels intervalles cette fonction est-elle convexe ?

d) Est-ce que $S(x)$ est différentiable sur $x \in [-10, 10]$? Expliquez.

e) Est-ce que $S(x)$ a des asymptotes horizontales ? Expliquez.

f) Situez graphiquement la solution de l'équation

$$S(x) = 0.2$$

et donnez-en la valeur à deux décimales correctes.

Question 2 (20 points) (La TI est permise seulement pour vérifier vos calculs)
On modélise la vitesse du métabolisme basal d'un homme jeune par la fonction $R(t) = 85 - 0.18\cos(\pi t/12)$ où t est le temps mesuré en heures à partir de 5 h du matin et où R est exprimé en kcal/h. Quelle est la consommation d'énergie due au métabolisme basal jusqu'à 17 h ? Et dans la journée complète ?

Question 3 (20 points)
Sachant que f est continue et que $\int_0^4 f(x)dx = 10$, déterminez la valeur de $\int_0^2 f(2x)dx$.

Question 4 (40 points) (La TI est permise seulement pour vérifier vos calculs)

La force qu'exerce la gravité sur un objet de masse m à une hauteur h au-dessus de la surface de la Terre est égale à :

$$F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2}$$

où R est le rayon de la Terre et g l'accélération due à la pesanteur.

a) Exprimez F comme une série de puissance de h/R.

b) Observez que si on ne retient que le premier terme pour approximer F, on obtient l'expression $F \approx mg$ qui est habituellement employée lorsque h est beaucoup plus petit que R. Estimez la plage des valeurs de h pour lesquelles l'approximation $F \approx mg$ est précise au moins de 1 % (prenez $R = 6400$ km).

Question 5 (70 points)

1. Calculez à la main :
   a) $\displaystyle\int (\ln x)^2 dx$ (Par parties)
   b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$ (Par substitution. Attention au domaine !)
   c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$ (Avec une série de MacLaurin)
   d) $\displaystyle\int_0^{T/2} \sin(2\pi t/T - \alpha) dt$
   e) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{-x^2+6x-5}} dx$
2. Déterminez (à la main) le rayon et l'intervalle de convergence :
   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$
   b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$

Question 6 (30 points) (La TI est permise mais expliquez votre démarche en détails)
Soir R la région du plan cartésien comprise entre les courbes $y = \frac{x^2}{2}$, $y = 3\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ et à la droite de $x = 1$.

1. Dessinez cette région et calculez en son aire.

2. Calculez le volume du solide engendré par la rotation de R autour de l'axe $x = 4$.

3. Déterminez la longueur totale de la frontière de R.