Table des séries de base

$$\frac{1}{1-u} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} u^n \;=\; 1+u+u^2+u^3+u^4+u^5+\dots \quad u \in]-1\,;1[$$

$$e^u \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \;=\; 1+\frac{u}{1!}+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\frac{u^4}{4!}+\frac{u^5}{5!}+\dots \quad u \in]-\infty;\infty[$$

$$\sin(u) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} \;=\; u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}-\frac{u^7}{7!}+\frac{u^9}{9!}-\dots \quad u \in]-\infty;\infty[$$

$$\cos(u) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!} \;=\; 1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}-\frac{u^6}{6!}+\frac{u^8}{8!}-\dots \quad u \in]-\infty;\infty[$$

$$\arctan(u) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{2n+1} \;=\; u-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}-\frac{u^7}{7}+\frac{u^9}{9}-\dots \quad u \in [-1;1]$$

$$\ln(1+u) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{n+1}}{n+1} \;=\; u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\frac{u^5}{5}-\dots \quad u \in]-1;1]$$

$$(1+u)^k \;=\; 1+\frac{k}{1!}u+\frac{k(k-1)}{2!}u^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}u^3 + \dots + \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!}u^n + \dots \quad u \in]-1;1[$$

Test du rapport
Soit la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \;=\; u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+\dots+u_n+u_{n+1}+\dots$$

On calcule le rapport R entre deux termes successifs de la série lorsque $n \to \infty$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$$

et on en conclut que

1. $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge si $R < 1$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge si $R > 1$
3. on ne peut rien conclure si $R = 1$.

Lorsque $R < 1$, le test du rapport nous permet de déterminer l'intervalle de convergence d'une série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ où les termes u_n dépendent d'une variable x.